Universidad Andrés Bello

P.2] En un recipiente infinito lleno de agua inicialmente pura, se sumerge una célula de radio R, que suponemos centrada en el origen de $\mathbb{R}^3$. Esta célula produce una proteina que atraviesa la membrana celular, de manera que estando inmersa en agua, mantiene una concentración de $C_0 \frac{\text{mol proteinas}}{\text{mol } H_2O}$ en la parte exterior de tal membrana. Haciendo supuestos naturales, determine la concentración de la proteina en el exterior de la célula, que se mantiene debidamente alimentada, una vez que se alcanza el régimen estacionario, considerando que el agua en la frontera exterior del recipiente, es decir en el infinito, se mantiene siempre pura.

Solución:

Tenemos una funcion $C(r,\theta,\phi,t)$ que modele la concentracion de la proteina.

Considerando la simetria esferica que exhibe el problema, podemos afirmar que la funcion C solo dependera del radio y del tiempo.

$$\Rightarrow C(r,\theta,\phi,t) \equiv C(r,t)$$

luego, la ecuación de difusión es:

$$\frac{d}{dt} C(r,t) = D\,\Delta C(r,t) \quad ; \; D: \text{cte difusion.}$$

Como no se menciona al tiempo, se esume que el sistema modelado se halla en un regimen estacionario. Es decir:

$$\frac{d}{dt} C(r,t) = 0.$$

De lo anterior, podemos afirmar que la funcion C solo depende del radio.

$$\Rightarrow C(r)$$

Por lo cual, la ecuación a resolver es:

$$\Delta C = 0$$

Escaneado con CamScanner

2| En el regimen estacionario, las condiciones de borde son:

$C(r=R) = C_0$ } concentracion en el borde de la celula.

$\lim_{r\to\infty} C(r) = 0$ } concentración en el borde del recipiente infinito.

Utilizando el laplaciano en coordenadas esfericas, pero unicamente la parte radial. Tenemos:

$$\Delta c = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}[rC] = 0 \quad ; \text{para } r \geq R \quad \cdots(1).$$

Como: $r \geq R \Rightarrow 1/r \geq 0$, Por lo cual:

$$\frac{d^2}{dr^2}[rC] = 0 \quad ; \quad r \geq R.$$

Luego:

$$\frac{d^2}{dr^2}[rc] \equiv \frac{d}{dr}\left[\frac{d}{dr}(rc)\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dr}\left[\frac{d}{dr}(rc)\right] = 0 \quad \cdots(2).$$

2> nota: $\frac{df(r)}{dr} = 0 \Rightarrow f(r) = G$; G = constante.

Aplicandolo en (2), Tenemos:

$$\frac{d}{dr}(rc) = G \quad ; \; G: \text{cte.} \quad \cdots(3).$$

2> nota: $\frac{dg(r)}{dr} = G \Rightarrow g(r) = Gr + D$; D: cte integración

Aplicandolo en (3), Tenemos:

$$rc = Gr + D \quad ; \; D: \text{cte.}$$

$$\Rightarrow \boxed{C = G + \frac{D}{r}}$$

Escaneado con CamScanner

Universidad Andrés Bello

Ahora, debemos determinar C y D

Para ello usaremos las condiciones de contorno:

$$C(R) = C_0 \quad y \quad \lim_{r\to\infty} C(r) = 0.$$

* Primero usamos:

$$\lim_{r\to\infty}\left[C + \frac{D}{r}\right] = C + \frac{D}{\infty} = C$$

pero: $\lim_{r\to\infty} C(r) = 0 \Rightarrow \boxed{C = 0}$

Entonces: $C(r) = \frac{D}{r}$

Ahora, usamos: $C(R) = C_0$

$$\Rightarrow \frac{D}{R} = C_0$$

$$\boxed{D = R C_0}$$

Por lo tanto: la solución general es:

$$\boxed{C(r) = \frac{C_0 R}{r}}$$

Escaneado con CamScanner